ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-328-338
УДК 517.957, 517.958, 517.925

О точном решении гиперболической системы дифференциальных уравнений

Елена Юрьевна ГРАЖДАНЦЕВА
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»
664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева»
Сибирского отделения Российской академии наук
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130

Аннотация. В работе рассматривается гиперболическая система двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами, одно из которых является нелинейным и содержит квадрат одной из неизвестных функций. При этом каждое уравнение содержит две неизвестные функции, зависящие, в свою очередь, от двух переменных. Для этой системы найдены точные решения: решение типа бегущей волны и автомодельное решение. Также определен тип начально-краевых условий, позволяющих использовать построенные общие решения для того, чтобы выписывать решение начально-краевой задачи для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: гиперболическая система дифференциальных уравнений в частных производных, решение типа бегущей волны, автомодельное решение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта FWEU-2021-0006 программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг.

Для цитирования: *Гражданцева Е.Ю.* О точном решении гиперболической системы дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 328–338. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-328-338.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-328-338

On exact solution of a hyperbolic system of differential equations

Elena Yu. GRAZHDANTSEVA
Irkutsk State University
1 Karla Marksa St., Irkutsk 664003, Russian Federation
Melentiev Energy Systems Institute
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Abstract. The paper considers a hyperbolic system of two first-order partial differential equations with constant coefficients, one of which is nonlinear and contains the square of one of the unknown functions. Moreover, each equation contains two unknown functions which in turn depend on two variables. Exact solutions are found for this system: a traveling wave solution and a self-similar solution. There is also defined the type of initial-boundary conditions which allow to use the constructed general solutions in order to write out a solution of the initial-boundary value problem for the system of differential equations under consideration.

Keywords: hyperbolic system of partial differential equations, traveling wave solution, self-similar solution

Acknowledgements: The work is partially supported by the grant FWEU-2021-0006 of the RF Basic Research Program for 2021-2030.

Mathematics Subject Classification: 35L02, 35L60.

For citation: Grazhdantseva E.Yu. O tochnom reshenii giperbolicheskoy sistemy differentsial'nykh uravneniy [On exact solution of a hyperbolic system of differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 328–338. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-328-338. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В теоретической физике при описании поведения сплошной среды, будь то газ, жидкость или твердое тело, используются математические модели, приводящие к нелинейным дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных или системам таких уравнений. Причем только существенные дополнительные условия приводят к линейным дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям.

Как отмечено в [1, с. 9], изучение общих свойств нелинейных уравнений и методов их решения представляет собой быстро развивающую область современной математики, но при всем многообразии методов исследования и решения нелинейных уравнений эта область математики до сих пор не имеет столь же основательного теоретического фундамента, как теория линейных уравнений. В первую очередь, это связано с тем, что к нелинейным дифференциальным уравнениям не применим принцип суперпозиции решений, так что многообразие решений не является линейным (подробнее см. [1, с. 9, 10]).

Двумерное неустановившееся движение газов и жидкостей описывается гиперболической системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Это наиболее простые из гиперболических систем нелинейных уравнений, однако и они до сих пор остаются недостаточно изученными. В [1, с. 9, 10] констатируется: «Даже для этих систем в настоящее время нет достаточно полной теории (общих теорем существования и единственности решения задачи с начальными данными). Это объясняется тем, что для гиперболических систем нелинейных уравнений решение задачи Коши в целом связано с существенным осложнением как самой постановки этой задачи, так и методов ее решения. Таким образом, изучение гиперболических систем нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными составляет совершенно необходимый и пока еще не преодоленный этап в исследовании более общих нелинейных уравнений».

Поиску точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными посвящено достаточно большое количество работ, например, работы [2–8] посвящены построению и исследованию решений типа бегущей волны, в работах [4], [9–13] отражено построение и исследование автомодельного решения. Кроме того, ряд работ (например, [14–20] и др.) посвящены построению и исследованию численных решений.

С развитием отраслей, затрагивающих процессы, описываемые гиперболическими системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, возникает проблема минимизации времени, которое тратится на поиск решения поставленной задачи (какими бы не были быстродейственными численные способы получения решения и технические возможности). Одним из способов ускорения процесса поиска решения подобных задач является наличие точного решения (пусть даже в некоторой ограниченной области).

Данная работа посвящена двум классам точных решений гиперболической системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, а именно, решениям типа бегущей волны и автомодельным решениям, а также определению вида начально-краевой задачи, имеющей такие решения.

Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial l} + \alpha_0 \dfrac{\partial x}{\partial t} \pm \alpha_1 x^2 = 0, \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial l} + \alpha_2 \dfrac{\partial p}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ — действительные положительные числа, $p = p(l,t)$ и $x = x(l,t)$ — неизвестные функции свободных переменных l и t, причем $(l,t) \in D = \{(l,t) : l \in [0,L],\ t \geq 0\}$, $L \in R_+$.

1. Основные понятия

Пусть искомая величина — это функция $u = u(l,t)$ двух переменных l и t, где l играет роль пространственной координаты, а t — роль времени.

Определение 1.1. Решением системы (0.1) *типа бегущей волны* (см. [21]) называют решение вида $u(l,t) = V(z)$, $z = kl - mt$, где величина m/k играет роль скорости распространения волны (m может быть любого знака, значение $m = 0$ отвечает стационарному решению, а значение $k = 0$ отвечает пространственно-однородному решению).

Определение 1.2. *Автомодельным решением* (см. [21,22]) системы (0.1) называют решение вида $u(l,t) = t^a W(y)$, $y = xt^b$, где показатели степени a и b определяются в процессе построения решения (из вида решаемого уравнения).

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Для произвольных $k \in R$, $m \in R$ система (0.1) имеет решение типа бегущей волны, и это решение определяется соотношениями*

$$x(l,t) = \pm \frac{\alpha_0\alpha_2 - \lambda^2}{\alpha_1\alpha_2(t + \lambda l + C)}, \quad p(l,t) = \mp \frac{(\alpha_0\alpha_2 - \lambda^2)\lambda}{\alpha_1\alpha_2^2(t + \lambda l + C)} + A, \tag{2.1}$$

где C, A — произвольные постоянные, $\lambda = -m/k$.

Доказательство. Пусть заданы $k \in R$, $m \in R$. Будем искать решение системы (0.1) в виде

$$x(l,t) = U(y), \quad p(l,t) = V(y), \quad y = kl - mt. \tag{2.2}$$

После подстановки (2.2) в уравнения системы (0.1), учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial l} = kU', \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -mU', \quad \frac{\partial p}{\partial l} = kV', \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -mV',$$

преобразуем систему (0.1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} kV' - \alpha_0 mU' \pm \alpha_1 U^2 = 0, \\ kU' - \alpha_2 mV' = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

относительно неизвестных функций $U = U(y)$ и $V = V(y)$ свободной переменной y.

Из второго уравнения системы (2.3) имеем

$$V' = \frac{k}{\alpha_2 m} U'. \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), запишем первое уравнение системы (2.3) в виде обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\left(\frac{k^2}{\alpha_2 m} - \alpha_0 m\right) U' + \alpha_1 U^2 = 0,$$

решением которого является функция

$$U(y) = \frac{\frac{k^2}{\alpha_2 m} - \alpha_0 m}{\alpha_1 y - C_1}.$$

А поскольку функция $V = V(y)$ удовлетворяет уравнению (2.4), получаем

$$V(y) = \frac{k}{\alpha_2 m} U(y) + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Возвращаясь к функциям $x = x(l,t)$ и $p = p(l,t)$, учитывая (2.2), а также то, что $\lambda = -m/k$, без ограничения общности, получаем представление этих функций формулами (2.1), где C, A — произвольные постоянные.

Убедится в том, что набор полученных таким образом функций $x = x(l,t)$ и $p = p(l,t)$ является решением системы (0.1), можно непосредственной подстановкой выражений (2.1) в уравнения системы (0.1). □

Теорема 2.2. *Система (0.1) имеет автомодельное решение вида*

$$x(l,t) = \frac{1}{t} W(y), \quad p(l,t) = \frac{1}{t} g(y), \quad y = \frac{l}{t}, \tag{2.5}$$

где

$$W(y) = \frac{4\alpha_0\alpha_2 y}{\pm 2\alpha_1\alpha_2 y \mp \alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}} (1 - \alpha_0\alpha_2 y^2) \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha_0\alpha_2} y}{1 - \sqrt{\alpha_0\alpha_2} y} + 4\alpha_0 C (1 - \alpha_0\alpha_2 y^2)}, \tag{2.6}$$

$$g(y) = \frac{4\alpha_0}{\pm 2\alpha_1\alpha_2 y \mp \alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}} (1 - \alpha_0\alpha_2 y^2) \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha_0\alpha_2} y}{1 - \sqrt{\alpha_0\alpha_2} y} + 4\alpha_0 C (1 - \alpha_0\alpha_2 y^2)}, \tag{2.7}$$

C *— произвольная постоянная.*

Доказательство. Пусть $x = x(l,t)$ и $p = p(l,t)$ имеют вид (2.5). После подстановки (2.5) в уравнения системы (0.1), учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{t^2} W - \frac{l}{t^3} W', \quad \frac{\partial x}{\partial l} = \frac{1}{t^2} W', \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{t^2} g - \frac{l}{t^3} g', \quad \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{t^2} g',$$

преобразуем систему (0.1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} g' - \alpha_0 W - \alpha_0 y W' \pm \alpha_1 W^2 = 0, \\ W' - \alpha_2 g - \alpha_2 y g' = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Введем обозначение:

$$F(y) = \pm 2\alpha_1\alpha_2 y \mp \alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}} (1 - \alpha_0\alpha_2 y^2) \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha_0\alpha_2} y}{1 - \sqrt{\alpha_0\alpha_2} y} + 4\alpha_0 C (1 - \alpha_0\alpha_2 y^2).$$

С учетом этого обозначения, формулы (2.6), (2.7) перепишем в виде

$$W(y) = \frac{4\alpha_0\alpha_2 y}{F(y)}, \quad g(y) = \frac{4\alpha_0}{F(y)}.$$

Таким образом, имеем

$$W'(y) = \frac{4\alpha_0\alpha_2}{F(y)} - \frac{4\alpha_0\alpha_2 y\left(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\,\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} - 8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\right)}{\left(F(y)\right)^2},$$

$$g'(y) = \frac{-4\alpha_0\left(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\,\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} - 8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\right)}{\left(F(y)\right)^2}.$$

Следовательно, левая часть первого уравнения системы (2.8) принимает вид

$$g' - \alpha_0 W - \alpha_0 y W' \pm \alpha_1 W^2$$

$$= \frac{\mp 8\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\,\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} + 32\alpha_0^3\alpha_2 Cy}{\left(F(y)\right)^2} - \frac{4\alpha_0^2\alpha_2 y}{F(y)}$$

$$-\alpha_0 y\left(\frac{4\alpha_0\alpha_2}{F(y)} - \frac{4\alpha_0\alpha_2 y\Big(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\,\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} - 8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\Big)}{\left(F(y)\right)^2}\right) \pm \alpha_1\left(\frac{4\alpha_0\alpha_2 y}{F(y)}\right)^2.$$

После приведения всех слагаемых к общему знаменателю и перегруппировки слагаемых числителя получившейся при этом дроби получим:

$$g' - \alpha_0 W - \alpha_0 y W' \pm \alpha_1 W^2 = \frac{A(y)}{\left(F(y)\right)^2},$$

где

$$A(y) = \Big(\mp 8\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y \pm 4\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y \mp 4\alpha_0^3\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^3$$

$$\pm 4\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y \mp 4\alpha_0^3\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^3 \pm 8\alpha_0^3\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^3\Big)\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}$$

$$+\big(32\alpha_0^3\alpha_2 - 16\alpha_0^3\alpha_2 - 16\alpha_0^3\alpha_2\big)Cy + \big(16\alpha_0^4\alpha_2^2 + 16\alpha_0^4\alpha_2^2 - 32\alpha_0^4\alpha_2^2\big)Cy^3$$

$$+\big(\mp 16\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2 \mp 16\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2 \pm 32\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2\big)y^2.$$

А поскольку $A(y) = 0$, получаем первое уравнение системы (2.8), т. е. функции (2.6) и (2.7) удовлетворяют первому уравнению системы (2.8).

Далее, справедлива следующая цепочка равенств:

$$W' - \alpha_2 g - \alpha_2 y g' =$$

$$= \frac{4\alpha_0\alpha_2}{F(y)} - \frac{4\alpha_0\alpha_2 y\left(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\,\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} - 8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\right)}{\left(F(y)\right)^2}$$

$$-\frac{4\alpha_0\alpha_2}{F(y)}-\alpha_2 y\frac{-4\alpha_0\left(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\ \ln\dfrac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}-8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\right)}{(F(y))^2}=\frac{B(y)}{(F(y))^2}=0,$$

так как

$$B(y)=\left(\mp 8\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^2\pm 8\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^2\right)\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}$$
$$+32\alpha_0^3\alpha_2^2Cy^2-32\alpha_0^3\alpha_2^2Cy^2=0.$$

Следовательно, функции, определенные формулами (2.6) и (2.7), удовлетворяют второму уравнению системы (2.8). □

З а м е ч а н и е 2.1. Автомодельное решение системы (0.1) в переменных (l,t) имеет вид

$$x(l,t)=\frac{4\alpha_0\alpha_2 l}{\pm 2\alpha_1\alpha_2\,l\,t\mp\alpha_1\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0}}(t^2-\alpha_0\alpha_2\,l^2)\ln\dfrac{t+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\,l}{t-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\,l}+4\alpha_0\,C(t^2-\alpha_0\alpha_2\,l^2)},\tag{2.9}$$

$$p(l,t)=\frac{4\alpha_0\,t}{\pm 2\alpha_1\alpha_2\,l\,t\mp\alpha_1\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0}}(t^2-\alpha_0\alpha_2\,l^2)\ln\dfrac{t+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\,l}{t-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\,l}+4\alpha_0\,C(t^2-\alpha_0\alpha_2\,l^2)}.\tag{2.10}$$

Убедиться в справедливости этого замечания можно, непосредственно подставив функции (2.9) и (2.10) в уравнения системы (0.1).

З а м е ч а н и е 2.2. Решение (2.5)–(2.7), равно как и (2.9), (2.10), является частным случаем более общего автомодельного решения вида (2.5) с функцией

$$W(y)=\alpha_2\,y\,g(y)+C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная, а функция $g=g(y)$ является решением уравнения

$$g'+\frac{\pm 2\alpha_1\alpha_2\,C_2-2\alpha_0\alpha_2\,y}{1-\alpha_0\alpha_2\,y^2}g\pm\frac{\alpha_1\alpha_2^2\,y^2}{1-\alpha_0\alpha_2y^2}g^2+C_2^2=0$$

при $C_2=0$.

Особенность решения типа бегущей волны и автомодельного решения заключается в том, что благодаря специфической замене искомых функций и свободных переменных дифференциальные уравнения в частных производных преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Таким образом, задача интегрирования дифференциального уравнения с частными производными преобразуется в задачу интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения. Известно, что результатом интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является семейство функций (интегральных кривых), отличающихся друг от друга на постоянную величину (произвольную постоянную), при этом исчерпывается все многообразие решений обыкновенного дифференциального уравнения, что, в свою очередь, позволяет из этого многообразия выделять решения, отвечающие дополнительным условиям, например, начальным условиям (задача Коши).

Однако, решение типа бегущей волны и автомодельное решение выделяют лишь класс решений, обладающих специфическими свойствами, из всего многообразия возможных точных решений дифференциального уравнения в частных производных. Кроме того, специфика таких решений ограничивает свободу в постановке задачи для дифференциального уравнения, т. е. начальной, краевой или начально-краевой задачи.

Пусть заданы $x_0 \in R$, $p_0 \in R$, $t_0 \in R_+$, $l_0 \in R$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (0.1) с условиями

$$x(l,t)\Big|_{\substack{l=l_0\\ t=t_0}} = x_0, \qquad p(l,t)\Big|_{\substack{l=l_0\\ t=t_0}} = p_0. \tag{2.11}$$

Утверждение 2.1. *В области* $D = \left\{(l,t)\ :\ (t+\lambda l)x_0 \neq x_0(t_0+\lambda l_0) \mp \dfrac{\alpha_0\alpha_2-\lambda^2}{\alpha_1\alpha_2}\right\}$ *начально-краевая задача* (0.1), (2.11) *имеет решение типа бегущей волны вида*

$$x(l,t) = \pm\frac{(\alpha_0\alpha_2-\lambda^2)x_0}{\alpha_1\alpha_2 x_0(t-t_0+\lambda(l-l_0)) \pm (\alpha_0\alpha_2-\lambda^2)},$$

$$p(l,t) = \mp\frac{(\alpha_0\alpha_2-\lambda^2)\lambda\, x_0}{\alpha_1\alpha_2^2 x_0(t-t_0+\lambda(l-l_0)) \pm \alpha_2(\alpha_0\alpha_2-\lambda^2)} + p_0 + \frac{\lambda}{\alpha_2}x_0.$$

Утверждение 2.2. *Пусть* $x_0 \in R\backslash\{0\}$, $p_0 \in R$, $t_0 \in R_+$, $t_0 > \sqrt{\alpha_0\alpha_2}|l_0|$, $l_0 \in R$, *и, кроме того, справедливо равенство* $x_0 t_0 = \alpha_2 p_0 l_0$. *Тогда в области*

$$\begin{aligned} D =&\Big\{(l,t)\ :\ t > \sqrt{\alpha_0\alpha_2}|l|,\\ &\pm 2\alpha_1\alpha_2\, l\, t \mp \alpha_1\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\left(t^2-\alpha_0\alpha_2\, l^2\right)\ln\frac{t+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\, l}{t-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\, l} + 4\alpha_0 C\left(t^2-\alpha_0\alpha_2\, l^2\right) \neq 0\Big\}\end{aligned}$$

начально-краевая задача (0.1), (2.11) *имеет автомодельное решение вида* (2.9), (2.10), *где*

$$C = \frac{\alpha_2 l_0}{x_0(t_0^2-\alpha_0\alpha_2 l_0^2)} \mp \frac{\alpha_1\alpha_2 l_0 t_0}{2\alpha_0(t_0^2-\alpha_0\alpha_2 l_0^2)} \pm \frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\ln\frac{t_0+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}l_0}{t_0-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}l_0}.$$

3. Дополнение

Утверждение 3.1. *Если* $\alpha_1 = 0$, *то решение типа бегущей волны системы* (0.1) *принимает вид* $x(l,t) = C_3$, $p(l,t) = C_4$, *где* C_3, C_4 *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.1 будем искать решение типа бегущей волны в виде (2.2). Тогда система (0.1) при $\alpha_1 = 0$ преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left\{\begin{aligned} &kV' - \alpha_0 m U' = 0,\\ &kU' - \alpha_2 m V' = 0\end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

относительно неизвестных функций $U = U(y)$ и $V = V(y)$ свободной переменной y.

Решением системы (3.1) являются любые постоянные функции $U(y) = C_3$, $V(y) = C_4$. Следовательно, $x(l,t) = C_3$, $p(l,t) = C_4$, где C_3, C_4 — произвольные постоянные. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. В условиях утверждения 3.1 решение типа бегущей волны для начально-краевой задачи (0.1), (2.11) при $\alpha_1 = 0$ принимает вид $x(l,t) = x_0$, $p(l,t) = p_0$.

Утверждение 3.2. *Если $\alpha_1 = 0$, то автомодельное решение системы (0.1) имеет вид*

$$x(l,t) = \frac{\alpha_2 C_3 l + C_4 t}{t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2}, \quad p(l,t) = \frac{C_3 t + \alpha_0 C_4 l}{t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2}. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедиться в справедливости этого утверждения можно, подставив функции вида (3.2) в уравнения системы (0.1). Таким образом, учитывая, что, согласно предположению, $\alpha_1 = 0$, получим тождества. □

Утверждение 3.3. *Пусть $x_0 \in R\backslash\{0\}$, $p_0 \in R$, $t_0 \in R_+$, $l_0 \in R$. Если $\alpha_1 = 0$, то в области $D = \big\{(l,t):\ t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2 \neq 0,\ l \in R,\ t \in R\big\}$ начально-краевая задача (0.1), (2.11) имеет автомодельное решение вида*

$$x(l,t) = \frac{\alpha_2(p_0t_0 - \alpha_0 l_0 x_0)l + (x_0t_0 - \alpha_2 p_0 l_0)t}{t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2}, \tag{3.3}$$

$$p(l,t) = \frac{(p_0t_0 - \alpha_0 l_0 x_0)t + \alpha_0(x_0t_0 - \alpha_2 p_0 l_0)l}{t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно подставить функции (3.3) и (3.4) в уравнения системы (0.1) и условия (2.11) и убедиться в их выполнении. □

References

[1] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука, М., 1978. [B. L. Rozhdestvensky, N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations and their Applications in Gas Dynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[2] А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Спевак, "О решениях типа бегущей волны для нелинейного уравнения теплопроводности", *Дифференциальные уравнения и оптимальное управление*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **196**, ВИНИТИ РАН, М., 2021, 36–43. [A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov, L. F. Spevak, "On solutions of the traveling wave type for the nonlinear heat equation", *Differential Equations and Optimal Control*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **196**, VINITI, Moscow, 2021, 36–43 (In Russian)].

[3] В. Р. Тагирова, "Решение задачи гидроразрыва в виде бегущей волны", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, № 4, 46–48. [V. R. Tagirova, "A solution to the hydraulic fracture problem in the traveling wave form", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2009, № 4, 46–48 (In Russian)].

[4] А. Д. Полянин, "Неклассические (неинвариантные) решения типа бегущей волны и автомодельные решения", *Доклады академии наук*, **398**:1 (2004), 33–37; англ. пер.:A. D. Polyanin, "Nonclassical (noninvariant) traveling-wave solutions and self-similar solutions", *Doklady Mathematics*, **70**:2 (2004), 790–793.

[5] С. В. Пикулин, "О решениях типа бегущей волны уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:2 (2018), 244–252; англ. пер.:S. V. Pikulin, "Traveling-wave solutions of the Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation", *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**:2 (2018), 230–237.

[6] Х. С. Кучакшоев, "Ограниченные решения типа бегущей волны и некоторые частные решения системы Келлера–Сиджела", *Доклады академии наук республики Таджикистан*, **54**:8 (2011), 610–617. [Kh. S. Kuchakshoev, "Bounded solutions of the traveling wave type and some particular solutions of the Keller–Siegel system", *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, **54**:8 (2011), 610–617 (In Russian)].

[7] Е. А. Будылина, Е. Г. Мурачев, И. А. Гарькина, А. М. Данилов, “Решения уравнения Клейна–Гордона типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности”, *Фундаментальные исследования*, 2014, № 5-5, 1000–1005. [E. A. Budylina, E. G. Murachev, I. A. Garkina, A. M. Danilov, “Solutions of the Klein–Gordon equation of traveling wave type, which smoothed at infinity”, *Fundamental Research*, 2014, № 5-5, 1000–1005 (In Russian)].

[8] П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, “О решениях типа «бегущая волна» дифференциальных уравнений с частными производными”, *Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании*, 2011, № 2, 102–108. [P. A. Velmisov, Yu. A. Kazakova, “On solutions of “travelling wave” type of partial differential equations”, *Mathematical Methods and Models: Theory, Applications and Role in Education*, 2011, № 2, 102–108 (In Russian)].

[9] Т. Д. Джураев, Ю. П. Апаков, “Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **2(15)** (2007), 18–26. [T. D. Dzhuraev, Yu. P. Apakov, “On self-similar solution of an equation of the third order with multiple characteristics”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **2(15)** (2007), 18–26 (In Russian)].

[10] Б. Т. Мекенбаев, Ч. Т. Дуйшеналиев, “Автомодельное решение динамики гравитационных потоков в наклонных каналах”, *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии*, 2016, № 3(35), 59–71. [B. T. Mekenbaev, Ch. T. Duishenaliev, “Self-similar solutions of gravitational flows dynamics in inclined channels”, *Caspian Journal: Control and High Technologies*, 2016, № 3(35), 59–71 (In Russian)].

[11] Э. В. Теодорович, “Автомодельное решение плоской задачи об эволюции трещины гидроразрыва в упругой среде”, *Прикладная математика и механика*, **74**:2 (2010), 252–261; англ. пер.:E. V. Teodorovich, “Self-similar solution of the plane problem of the evolution of a hydraulic fracture crack in an elastic medium”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **74**:2 (2010), 181–187.

[12] А. В. Шмидт, “Автомодельное решение задачи о турбулентном течении круглой затопленной струи”, *Прикладная механика и техническая физика*, **56**:3(331) (2015), 82–88; англ. пер.:A. V. Shmidt, “Self-similar solution of the problem of a turbulent flow in a round submerged jet”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **56**:3 (2015), 414–419.

[13] Б. В. Алексеев, И. В. Овчинникова, “Автомодельные решения гидродинамических уравнений нелокальной физики”, *Вестник МИТХТ им. М. В. Ломоносова*, **9**:6 (2014), 47–54. [B. V. Alekseev, I. V. Ovchinnikova, “Self-similar solutions of hydrodynamic equations of nonlocal physics”, *Bulletin of the M. V. Lomonosov MITHT*, **9**:6 (2014), 47–54 (In Russian)].

[14] А. В. Аргучинцев, “Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2002, № 12, 23–29; англ. пер.:A. V. Arguchintsev, “Solution of the problem of the optimal control of initial-boundary conditions of a hyperbolic system based on exact increment formulas”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **46**:12 (2002), 21–27.

[15] А. В. Соловьев, А. В. Данилин, “Использование схемы Диез повышенного порядка точности для решения некоторых нелинейных гиперболических систем уравнений”, *Вычислительные методы и программирование*, **20**:1 (2019), 45–53. [A. V. Solov’ev, A. V. Danilin, “Using the Sharp scheme of higher-order accuracy for solving some nonlinear hyperbolic systems of equations”, *Num. Meth. Prog.*, **20**:1 (2019), 45–53 (In Russian)].

[16] Ю. О. Яковлева, А. В. Тарасенко, “Решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка методом Римана”, *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, **25**:3 (2019), 33–38. [J. O. Yakovleva, A. V. Tarasenko, “The solution of Cauchy problem for the hyperbolic differential equations of the fourth order by the Riman method”, *Vestnik SamU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, **25**:3 (2019), 33–38 (In Russian)].

[17] Р. Ю. Новиков, “Численное решение уравнений гиперболического типа”, *Двойные технологии*, 2011, № 3(56), 48–51. [R. Yu. Novikov, “Numerical solution of equations of hyperbolic type”, *Double Technologies*, 2011, № 3(56), 48–51 (In Russian)].

[18] О. П. Комурджишвили, “Разностные схемы для решения многомерных уравнений и систем уравнений гиперболического типа”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:6 (2007), 980–987; англ. пер.:O. P. Komurdzhishvili, “Finite-difference schemes for solving multidimensional hyperbolic equations and their systems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:6 (2007), 936–942.

[19] Г. А. Абдикаликова, А. Х. Жумагазиев, “Построение многопериодического решения одной задачи для нелинейной гиперболической системы уравнений”, *Sciences of Europe*, **12**:12 (2007), 15–19. [G. A. Abdikalikova, A. H. Zhumagaziyev, “Construction of the multiperiodical solution of

one problem for a nonlinear of hyperbolic system equations”, *Sciences of Europe*, **12**:12 (2007), 15–19 (In Russian)].

[20] В. В. Тарасевич, *Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах*, автореф. дис. … д-ра. техн. наук, Новосибирск, 2017, 38 с. [V. V. Tarasevich, *Development of the theory and methods for calculating hydrodynamic processes in pressure pipeline systems*, Abstr. Diss. … Doc. Tech. Sciences, Novosibirsk, 2017 (In Russian), 38 pp.]

[21] А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. Ю. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2005. [A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Yu. Zhurov, *Methods for Solving Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics*, FIZMATLIT Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[22] Е. Ю. Гражданцева, С. В. Солодуша, “Об одном аналитическом решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных”, *Нелинейный анализ и экстремальные задачи*, Материалы 7-й Международной конференции по нелинейному анализу и экстремальным задачам (НЛА-2022) (Иркутск, 15–22 июля 2022 г.), ред. А. А. Толстоногов, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, 2022, 42–43. [E. Yu. Grazhdantseva, S. V. Solodusha, “On an analytical solution of a nonlinear partial differential equation”, *Nonlinear Analysis and Extremal Problems*, Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022) (Irkutsk, July 15–22, 2022), ed. A. A. Tolstonogov, ISDCT SB RAS, Irkutsk, 2022, 42–43 (In Russian)].

Информация об авторе

Гражданцева Елена Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений. Иркутский государственный университет; младший научный сотрудник отдела прикладной математики. Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: grelyur@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9541-5679

Поступила в редакцию 23.08.2022 г.
Поступила после рецензирования 26.10.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Elena Yu. Grazhdantseva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis and Differential Equations Department. Irkutsk State University; Junior Researcher of Applied Mathematics Department. Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: grelyur@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9541-5679

Received 23.08.2022
Reviewed 26.10.2022
Accepted for press 24.11.2022